

二维涡旋的 Lattice Boltzmann 方法模拟^{*}

陈 炬 桦

(中山大学计算机科学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 介绍一个流体问题的 Lattice Boltzmann 并行模拟模型, 该模型也是一种细胞自动机模型。用该模型模拟了二维的涡旋现象。利用计算机可视技术, 可动态显示流体流动的演化过程, 可用于分析、仿真流体流动现象, 也可用于设计、优化一些物体与流体接触的边界。

关键词: 并行计算; Lattice Boltzmann; 二维涡旋; 计算机仿真

中图分类号: O242; TP15 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2004) 06-0163-03

细胞自动机最早由 Von Neumann 和 Ulam 提出用于模拟生物中的自组织与自复制现象^[1], 它是把物理系统的空间和时间离散的一种数学方法。细胞自动机把空间离散为一些规则格子, 每个格点称为细胞 (Cell) 定义为一个变量; 所有细胞按离散的时间步并行演化, 每个细胞在某个时间步的取值为其邻域的前一时间步的函数。

细胞自动机有 3 个显著的特性: 大规模同步并行、局域相互作用和细胞结构简单。同步并行指在空间各个细胞的演化是同步、相同的演化规则 (相同的迭代公式) 进行, 它尤其适合于 SIMD 型并行计算机系统; 细胞作用的局域性使得该算法适合于区域分裂算法。在 MIMD 型并行计算机或分布式计算机上, 细胞自动机的计算区域可分裂为一些独立的子域, 在各子域之间只需交换共同边界上的数据 (数据传递量少), 在各自的子域内可独立演化, 对解决空间大的数学物理问题效果极好^[2]; 细胞自动机适合于不同结构的并行计算机系统。细胞的演化规则一般都比较简单, 但其演化能显示复杂的行为。

格子 Boltzmann 方法是由完全离散的格子气 (lattice gas, LG) 方法发展而来, 其理论背景是细胞自动机 (cellular automata, CA)。

解数学物理方程的边界处理方法一般是比较困难的, 而且十分重要, 对一个问题的边界用不同的处理方法可以导致结果相差较大, 有时所得的结果可能完全不正常。对于非规则的几何形状尤其困难。格子气与格子 Boltzmann 方法的边界处理在模拟不同的对象应采用不同的处理方法。常用的几种方法十分简单, 且对任意非规则的几何形状的边界

均可处理。常用的边界条件有: 固壁边界, 运动粒子碰到固壁边界沿原路径返回; 镜面滑动边界, 粒子按边界作镜面反射运动; 周期边界, 在模拟流场充分大时, 一般用周期边界虚拟。其处理方法为一对称边界 (同一行或同一列)。一边界运动出的粒子进入另一边界, 且方向大小相同。

格子气与格子 Boltzmann 方法有算法简单, 边界处理容易, 完全并行而且程序设计简单的特点。下面介绍陈十一等^[3]提出基于单时间松弛方法, 设单粒子分布函数为 $f_i(x, t)$, 可得到 Boltzmann 方程:

$$f_i(x + e_i, t + 1) = f_i(x, t) + \Omega_i(f_i(x, t))$$

式中, x 为空间离散的节点, t 为离散的时间步, 将 $\Omega_i(f_i(x, t))$ 离散为 $-(f_i - f_i^{eq})/\tau$, 令 $1/\tau = \omega$, 则有

$$\begin{aligned} f_i(x + e_i, t + 1) = \\ f_i(x, t) - \omega(f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)) = \\ (1 - \omega)f_i(x, t) + \omega f_i^{eq}(x, t) \end{aligned}$$

上式中必须满足守恒律 (质量和动量)

$$\rho(x, t) = \sum f_i(x, t) = \sum f_i^{eq}(x, t)$$

$$\rho(x, t) u(x, t) = \sum e_i f_i(x, t) = \sum e_i f_i^{eq}(x, t)$$

1 九点正方形格子 Boltzmann 模型

该模型将空间离散成正方形网格。每个网格节点取其周围 8 个节点及本身节点为邻居, 称九点正方形模型。每个节点细胞的结构有 9 个方向值 (图 1 所示), 在每个时间步均有粒子向其邻居节点运动, 同时各邻居节点也有粒子向该节点运动。在下一时间步各运动粒子同时到达各自的目标节点, 在各节点产生碰撞, 作用后又演化为新的运动粒子流向各节点的邻居。粒子的运动速度分别为 $\sqrt{2}$, 1,

^{*} 收稿日期: 2003-12-08

基金项目: 国家教委骨干教师基金资助项目; 广东省自然科学基金资助项目 (04009863)

作者简介: 陈炬桦 (1960 年生) 男, 副教授, 博士 (后); E-mail: isscjh@zsu.edu.cn

0.

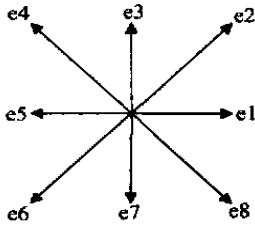


图1 细胞
Fig 1 Cell

设单粒子分布函数为 $f_i, i = 0, 1, \dots, 8$; 则可得格子 Boltzmann 方程:

$$f_i(x + e_i, t + 1) = f_i(x, t) \Omega_i = (1 - \omega) f_i(x, t) + \omega f_i^{eq}(x, t) \quad i = 0, 1, \dots, 8(1)$$

式中, x 为空间离散的节点, $t = 0, 1, 2, \dots$ 表示离散的时间步, $\omega = 1/\tau$ 为松弛因子, $f_i^{eq}(x, t)$ 为 x 节点在 t 时间步的局部平衡分布函数.

根据质量守恒与动量守恒定律有:

$$\rho(x, t) = \sum_{i=0}^8 f_i(x, t) = \sum_{i=0}^8 f_i^{eq}(x, t) \quad (2)$$

$$\rho u(x, t) = \sum_{i=1}^8 e_i f_i(x, t) = \sum_{i=1}^8 e_i f_i^{eq}(x, t) \quad (3)$$

式中, ρ 表示密度, u 表示流速. 平衡分布函数为

$$f_0^{eq} = A_0 + A_3 |u|^2 \quad (4)$$

$$f_i^{eq} = B_0 + B_1(e_i \cdot u) + B_2(e_i \cdot u)^2 + B_3 |u|^2 \quad i = 1, 3, 5, 7 \quad (5)$$

$$f_i^{eq} = C_0 + C_1(e_i \cdot u) + C_2(e_i \cdot u)^2 + C_3 |u|^2 \quad i = 2, 4, 6, 8 \quad (6)$$

由方程 (2)、(3), 方程 (4) ~ (6) 式中的系数应满足下列关系式

$$A_0 + 4B_0 + 4C_0 = \rho \quad (7)$$

$$A_3 + 2B_2 + 4C_2 + 4B_3 + 4C_3 = 0 \quad (8)$$

$$2B_1 + 4C_1 = \rho \quad (9)$$

(7) ~ (9) 式是一个不定方程组, 可有无穷组解, 对于实际流体, 可用自动建模方法确定方程 (1) 的系数 ω 和方程 (4) ~ (6) 的系数^[4].

2 二维涡旋的模拟

参照文[5]中的二维旋涡问题, 用九点正方形格子 Boltzmann 模型模拟, $\omega = 1.5$, 方程 (4) ~ (6) 的方程取为:

$$f_0^{eq} = \frac{4\rho}{9} [1 - \frac{3}{2} |u|^2] \quad (10)$$

$$f_i^{eq} = \frac{\rho}{9} [1 + 3(e_i \cdot u) + \frac{9}{2}(e_i \cdot u)^2 - \frac{3}{2} |u|^2] \quad i = 1, 3, 5, 7 \quad (11)$$

$$f_i^{eq} = \frac{\rho}{36} [1 + 3(e_i \cdot u) + \frac{9}{2}(e_i \cdot u)^2 - \frac{3}{2} |u|^2] \quad i = 2, 4, 6, 8 \quad (12)$$

(1) 取网格 40×40 , 中间一半径为 19 的圆, 为固壁边界, 所有圆内点初值 $\rho = 1$, 速度 u 为 0. 横向直径有速度 u 为恒值 0.2, 向右, 演化到 400 步时, 其速度场如图 2:

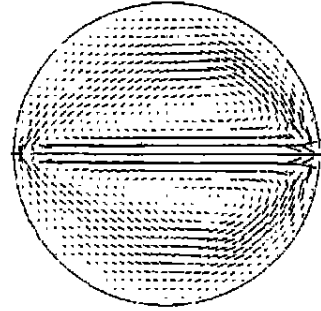


图2 演化到400步时的2个旋涡

Fig 2 Two vortices when the overlapping step time is 400

(2) 取网格 60×60 , 中间一半径为 29 的圆, 为固壁边界, 所有圆内点初值 $\rho = 1$, 速度 u 为 0. 横向直径有速度 u 为恒值左半径 0.2, 向右, 右半径 -0.2, 向左, 演化到 200 步, 其速度场如图 3.

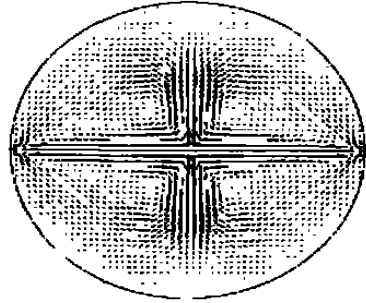


图3 演化到200步时的4个旋涡

Fig 3 Four vortices when the overlapping step time is 200

(3) 演化到 600 步时, 其速度场如图 4.

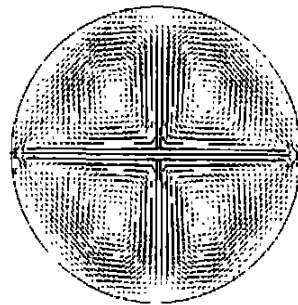


图4 演化到600步时的4个旋涡

Fig 4 Four vortices when the overlapping step time is 600

以上结果与文 [5] 一致, 说明该方法的有效性. 进一步改变横向直径的速度 u 的方向, 可以

模拟更加复杂的流场。

(4) 取网格 60×60 ，中间一半径为 29 的圆，为固壁边界，所有圆内点初值 $\rho=1$ ，速度 u 为 0。横向直径有速度 u 为恒值左 $1/3$ 直径 0.2，向右，中 $1/3$ 直径 -0.2，向左，右 $1/3$ 直径 0.2，向右，演化到 1 800 步时，其速度场如图 5。

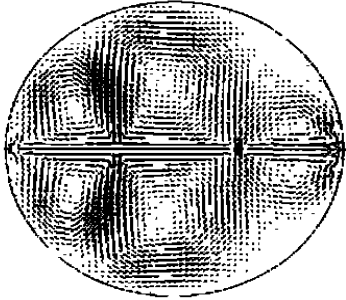


图5 演化到1 800步时的6个旋涡

Fig 5 Six vortices when the overlapping step time is 1 800

(5) 取网格 60×60 ，中间一半径为 29 的圆，为固壁边界，所有圆内点初值 $\rho=1$ ，速度 u 为 0。横向直径有速度 u 为 ± 0.2 ，平分 4 段方向为左、右、左、右，演化到 200 步时，其速度场如图 6。

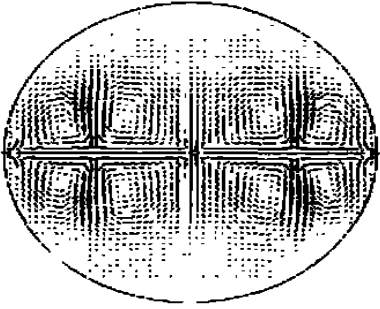


图6 演化到200步时的8个旋涡

Fig 6 Eight vortices when the overlapping step time is 200

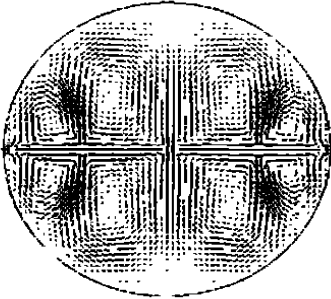


图7 演化到800步时的8个旋涡

Fig 7 Eight vortices when the overlapping step time is 800

(6) 演化到 800 步时，其速度场如图 7。

参考文献：

[1] Von NEUMANN J. Theory of self-reproducing automata[M] . Urbana: University of Illinois, 1966.

[2] CHEN J H, LI Y X. A distributed lattice Boltzmann method [J] . Wuhan University Journal of Natural Sciences, 1996, 1 (3/4) : 442—445.

[3] CHEN S, CHEN H, MARTINEZ D, et al. Lattice Boltzmann model for simulation of magneto-hydrodynamics[J] . Phys Rev, 1991, 67: 3776—3779.

[4] CHEN J H, TU W B. Automatic evolutionary modeling by the Lattice-Boltzmann method[J] . Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2003, 8(1B) : 319—322.

[5] 刘式达, 刘式适. 孤波和湍流[M] . 上海: 上海科技出版社, 1994.

Simulation of 2-dimension Vortex Flow Using Lattice Boltzmann Method

CHEN Ju hua

(Department of Computer Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A Lattice Boltzmann parallel computer simulation model is introduced to a fluid problem and this model is also a cellular automata model. This model is used to simulate 2-dimension vortex flow phenomenon. By using the computer graphical technique, the evolution process of liquid flow can be dynamically displayed. It can be used for analysis and simulation of liquid flow phenomenon, and furthermore for designing and optimizing the boundary between some objects and liquid.

Key words: parallel computing; Lattice Boltzmann; 2-dimension vortex flow; computer simulation